בלהה קוטשר*

שימוש בתורת ה-Reification לתרגום בעיות מילוליות לתבניות אלגבריות**

הספרות מראה שהאלגברה התפתחה באיטיות במשך כ־4,000 שנה, מן התקופה שבה נעשו כל תהליכי הפתרון בעל־פה והיו ברובם תהליכי חישוב, ועד המאה השש־עשרה, שבה החלו להשתמש באותיות כפרמטרים המאפשרים תפיסה מבנית של ביטויים אלגבריים.

תורת ה-Reification (Sfard, 1991) רואה נקודות דמיון רבות בין התפתחות תפיסת המושגים המתמטיים ובין התפתחותה של האלגברה במהלך ההיסטוריה. תורה זו גורסת שבדרך־כלל נתפס מושג מתמטי חדש קודם כל ברמה התהליכית (רק כתהליך חישוב), והמעבר לתפיסה מבנית הוא תהליך המצריך זמן ומאמץ קוגניטיבי. ברמה התהליכית אפשר לתפוס את $2X + 4 + 3X$ כהוראה להכפיל מספר נתון ב־2, להוסיף לו 4 ואז להוסיף לסכום זה את המספר הנתון מוכפל ב־3. תפיסה מבנית אפשרית של ביטוי זה עשויה לפרש אותו כ"אובייקט" מתמטי, כגון מספר בלתי ידוע או פונקציה ליניארית. מחקרים רבים (כמו Crowely, Thomas & Tall, 1994) אישרו את הקושי הקיים בתפיסה מבנית של מושגים מתמטיים. בסופו של דבר על התלמיד לרכוש את היכולת לתפוס מושגים מתמטיים בשתי רמות - ברמה התהליכית או ברמה המבנית, בהתאם להקשר. התפיסה המבנית מתקדמת יותר ולכן קשה יותר לבנות אותה.

בישראל מתחילים בדרך־כלל את לימודי האלגברה במחצית השנייה של כיתה ז׳. את הביטויים האלגבריים מפרשים בדרך־כלל כחישובים מספריים מוכללים ה"מדגימים נקודת־ראות פרוצדורלית (תהליכית) באלגברה" (Kieran, 1992, p. 392). בתוך פרק זמן קצר יחסית מצפים שהתלמיד יחשוב חשיבה מבנית בכמה תחומים של אלגברה. אחד

* הד"ר בלהה קוטשר היא מדריכה לדידקטיקה של המתמטיקה במכללה לחינוך ע"ש דוד ילין.

** פורסם לראשונה באנגלית ב-PME 20, vol.3 pp. 201-208.
המחברת מודה לד"ר אנה ספרד על הערותיה מאירות העיניים.

התחומים האלה הוא תרגום היגדים. חוקרים רבים (Chaiklin, 1989; Chement, Lochhead & Monk, 1981; Lochhead & Mestre, 1988; Mestre & Gerace, 1986; Reed, Dempster & Ettinger, 1985) חקרו את הקשיים שבהם נתקלים כאשר מתרגמים מהשפה הכתובה לשפת המתמטיקה. Chaiklin (1989) מסכם ואומר שרוב המחקרים הקוגניטיביים של פתרון בעיות אלגבריות מאשרים את הקושי הגדול שבו נתקל התלמיד בעת פענוח היחסים בין הגדלים השונים. עד כה פתר התלמיד בעיות מילוליות באמצעות תהליכי חישוב, באורח תהליכי, מבלי לדעת אלגברה. כעת מצפים שיחשוב חשיבה מבנית, שיתרגם ביטויים מילוליים ישירות לביטויים אלגבריים, שיתרגם את היחסים בין הגדלים השונים המופיעים בבעיה המילולית למשוואות או לאי־ שוויונים.

המחקר

מטרת המחקר היתה לבחון דרך "תהליכית" מסוימת המאפשרת ללמוד לתרגם את הביטויים המילוליים ואת הבעיות המילוליות ולהשוות את תוצאות התרגום הנעשה בדרך זאת עם תוצאות התרגום כפי שהוא נעשה בדרך־כלל, באופן מבני מסורתי. ההנחה, המובאת אצל Sfard & Linchevski (1994), היתה שבתחילה יש לילדים תפיסה תהליכית, והמטרה היתה ללמד אותם לתרגם, תוך הישענות רבה על יכולותיהם התהליכיות, תוך עקיפת הצורך ביכולות חשיבה מבנית מפותחות היטב.

במחקר השתתפו שישה תלמידים בכיתה ז', בנים ובנות, שלמדו בשתי חטיבות ביניים דומות. היו ביניהם שני תלמידים ממוצעים במתמטיקה, שני תלמידים טובים ושני תלמידים טובים מאוד - רמת התלמידים נקבעה בידי מוריהם למתמטיקה, בהתבסס על ביצועיהם בכיתה ועל מבחנים. כל התלמידים החלו ללמוד אלגברה זמן קצר לפני כן. הם למדו את המושגים *משתנה*, *מספר מקדם*, והחלפת מספרים בביטויים אלגבריים פשוטים. כמו כן למדו לפתור משוואות באופן אינטואיטיבי. הם לא למדו פעולות על משוואות, ולא ראו משוואות עם נעלמים בשני האגפים.

איסוף הנתונים

בתחילת המחקר השיב כל תלמיד על שאלון בראיון משולב - בכתב ובעל־פה - שנועד להעריך אם הוא תופס ביטויים אלגבריים תפיסה מבנית או תהליכית. דוגמאות לשאלות אלה ניתנות בטבלה 1.

טבלה 1

1.) עליך להסביר למישהו מה זה $n + 5$. מה תאמר לו?
2.) לפניך $817 = 508 - y$. מה זה אומר לך? מה תוכל לעשות עם זה? מדוע?
3.) מה זה אומר לך: $4m + 2m$? מה תוכל לעשות עם זה?

ראיונות אלה אפשרו לבחון מקרוב את דרך חשיבתם של התלמידים. לאחר מכן קיבל כל תלמיד שיעורים פרטניים בתרגום ביטויים ובעיות מילוליות תוך שימוש בשיטות תהליכיות. מספר השיעורים נע בין חמישה לעשרה, בהתאם למהירות הלמידה של כל תלמיד. כל השיעורים היו מובנים למחצה וניתנו מפי אותה מורה. כל נושאי הלימוד והשאלות במבחנים היו אחידים לגבי כל התלמידים. הנתונים נאספו מתמליל ההקלטות של הראיונות והשיעורים, שהוקלטו באודיו ובווידיאו.

תוצאות השאלון

מן הנתונים שנאספו התברר שמושגים אלגבריים רבים נתפסו תפיסה תהליכית. הראו לריקי י', תלמידה ממוצעת, את הביטוי $y-x^2$ ושאלו אותה מה זה אומר לה:

ריקי י': יש לי y שזה כל מספר ואני מחסירה ממנו מספר אחר בחזקת שתיים.

מורה: ומה זה $(y-x^2)$?

ריקי י': זה תרגיל עם שני נעלמים, ואמרו לנו ש-y הוא כל מספר פחות x בחזקת שתיים. וה־x הזה שווה למשהו וזה נותן לנו תוצאות.

בדומה לכך, כשהציגו את המשוואה $12x+5=13x+4$ לתלמידה טובה, ריקי ס':

מורה: ראית כבר משוואה כזאת בכיתה?

ריקי ס': לא.

מורה: מה ההבדל בין המשוואה הזאת לבין המשוואות האחרות שראית?

ריקי ס': במשוואות האחרות שראיתי היא (המורה) נתנה לי דוגמאות כמו שאת נתת לי בדוגמה הקודמת ($x+5=28$), 28 שווה לאיזשהו תרגיל. כאן נתת לי שני תרגילים.

מורה: בסדר. את יכולה לעשות עם זה משהו?

אני יכולה לנסות למצוא למה שווה x.

ריקי ס' הצליחה למצוא את x באמצעות ניסוי וטעייה. היא הציבה את אותו המספר במקום x בשני אגפי המשוואות וחישבה את הערך המספרי של כל אגף.

גם אצל תלמידה טובה מאוד, מיטל, ניכרה חשיבה תהליכית.

מורה: האם 4+8 זה מספר?

מיטל: שתים־עשרה.

מורה: כן, זה אומר לך 12. בסדר. מה לגבי b+3?

מיטל: זה לא יכול להיות מספר, כי אני לא יודעת מה זה b. זה נעלם.

שיחה זאת מייצגת את אופן החשיבה של התלמידים באותה עת. ביטויים אלגבריים נתפסו כ"תרגילים", כלומר מרשמים לתהליכי חישוב. את התהליכים האלה אפשר לבצע באופן חשבוני, בעזרת הדגמות מספריות מתאימות. יוצא הדופן היחיד היה רותם, תלמיד טוב מאוד. לפי השפה שהשתמש בה במשך כל הראיונות אפשר היה לראות שהתפתחותו המבנית התקדמה היטב. הוא תפס את m+3 כמייצג מספר, ליקט באופן ספונטני מונחים דומים, ולאחר מכן היה מסוגל לתרגם בקלות יחסים בין גדלים לביטויים אלגבריים ולמשוואות תוך שימוש בדרך המבנית המסורתית.

שיטות מסורתיות לתרגום יחסים מילוליים בין כמויות לביטויים האלגבריים הרלוונטיים מצריכים אופן מחשבה מבני, כאשר מתרגמים אותם לתיאורים סטטיים. דוגמה פשוטה: "מספר אחד גדול מהאחר ב־56. סכום המספרים 201. מצא את המספרים" - דורשת מן התלמיד לכתוב:

מספר ראשון: x   מספר שני: $x+56$

בסימול לעיל מצפים שהתלמיד יתפוס את $x+56$ כמספר, כשהוא אינו מסוגל עדיין לראות את 3+5 כמספר! (השווה את המקרה המתואר אצל ספארד ולינציבסקי, 1994, עמ' 103). כפי שתואר לעיל, לא ניכרה כמעט תפיסה מבנית בעוד שהיו הוכחות רבות לגישה התהליכית. רוב

תלמידי כיתה ז׳ נמצאים עדיין בשלב החשיבה התהליכית. לאור ממצאים אלה תוכנן מודל הוראה.

מודל ההוראה

שיטת התרגום של בעיות מילוליות לביטויים אלגבריים ולמשוואות שהוצעה במחקר זה היא תהליכית בטיבה והיא עושה שימוש בהדגמות מספריות לזיהוי היחסים הכתובים. זאת למשל דוגמה אופיינית לשלבים המוקדמים של הלימוד: "מצא/י מספר הגדול בשבע ממספר נתון". התלמיד מתבקש להבהיר לעצמו את משמעות הטקסט תוך שימוש בתהליך הצבת מספרים, לקבוע את המספר הנתון, w למשל, ולאחר מכן לכתוב את הביטוי המבוקש. תיאורטית, תיראה הטבלה כמו הטבלה המוצגת בטבלה 2.

טבלה 2

מספר נתון	מספר מבוקש
-2	-2+7
0	0+7
-4.5	-4.5+7
-	-
-	-
w	w+7

טבלה 3

מספר נתון	מספר מבוקש
-2	-2+7=5
0	0+7=7
-4.5	-4.5+7=2.5
-	-
-	-
w	w+7=

מעניין לציין שבעת הצבת המספרים, האפשרות לכתוב את המספר המבוקש כסכום, 2+7 למשל, לא נראתה לתלמידים, ובכל המקרים בלא יוצא מן הכלל חישבו את התוצאה, 2+7=9 למשל. הם המשיכו לעשות כן גם אחרי שהניסיון לימד אותם שתהליך ההצבה אינו אלא מכשיר למציאת הביטוי האלגברי הכללי הרלוונטי, שאותו עצמו אי־אפשר להמשיך לחשב. יתרה מזאת, שני התלמידים הבינוניים לא הסתפקו בחישוב הסכומים המספריים והתעקשו לצרף סימן "=" לביטויים האלגבריים שהתקבלו. הטבלה שלהם דומה לטבלה המוצגת לעיל בטבלה 3. הדבר ממחיש שתלמידים אלה מרגישים שחסר משהו, שהביטוי w+7 אינו מושלם, תופעה שחוקרים רבים כבר הבחינו בה (Robinson et al., 1994, למשל). ברור שהתלמידים מרגישים שהביטוי W+7 אינו אלא מרשם לתהליך, ואם רוצים לדבר על התוצאה יש לבצע את החישובים האלה. במילים אחרות, התלמידים לא רואים

עדיין את השניות הקיימת בביטוי האלגברי, בכך שהוא מייצג בו־בזמן גם תהליך וגם תוצאה של תהליך זה. בעת מילוי הטבלה התבססו התלמידים על ההבנה התהליכית שלהם לגבי ביטוי אלגברי; הם למדו שכדי להכליל בצורה נכונה יש למצוא את התהליך אבל לא את התוצאה.

הטעויות הנפוצות בתרגום הן ביצוע התאמה ותיוג משמאל לימין לפי סדר המילים, דבר המוכר היטב הודות לבעיית "התלמידים והמורים" המפורסמת (לוקהיד ומסטרה, 1988). התלמידים למדו שהביטויים המילוליים עלולים להטעות אותם ולהביאם לכתיבת יחסים שגויים, ולימדו אותם לבדוק את התרגומים שלהם. נאמר לתלמידים שחשוב לבדוק אם הדגמות "המספר המבוקש" שחישבו אכן עמדו באילוצים שהוצגו בבעיית התרגום; אם התוצאה המספרית התאימה, היתה סבירות טובה מאוד שהביטוי האלגברי יתאים גם הוא. ברור שתלמיד המתקשה עדיין לתרגם למספרים, יתקשה גם לתרגם לביטויים אלגבריים. תומר - תלמיד ממוצע - שייך לקטגוריה זאת. להלן שיחה אופיינית לשלב זה:

מורה: איזה מספר גדול בארבע משתים־עשרה?

תומר: שמונה. (הוא הפחית 4 מ-12)

מורה: ומספר הקטן בחמש ממינוס שתיים?

תומר: שלוש. (הוא הפחית שתיים מחמש)

פעמים רבות, כשעמדה בפני התלמידים בעיה דומה הם נטו לתרגם ישירות, ולוותר על שיטת מילוי הטבלה. ואולם כשנתבקשו לפתור בעיה שלגביה היה להם ספק, הם חזרו לשימוש בהדגמות מספריות. דוגמה לכך היא התרגום של הבעיה "תלמיד - מורה". חמישה מבין ששת התלמידים פתרו את הבעיה בצורה נכונה, ללא קושי; שני התלמידים הטובים מאוד תרגמו ישירות; תלמיד טוב אחד ותלמיד ממוצע אחד השתמשו בשיטת מילוי הטבלה ותרגמו בצורה נכונה. תומר, התלמיד הבינוני השני, לא היה מסוגל בשלב זה למצוא הדגמות מספריות נכונות או את הביטוי האלגברי לבעיה זאת. התלמיד הטוב השני היסס לשנייה לפני שנתן את תשובתו: מספר המורים הוא M; מספר התלמידים - S. וכך התנהלה השיחה:

אמיר: מספר התלמידים בבית־ספר גדול פי שישה. קודם כל זה כפל ומספר המורים, כלומר זה S פעמים, M כפול שש שווה ל... (והוא כותב $M \times 6 = s$).

מורה: הסבר מדוע היססת ואיך...
אמיר: M זה המורים, את זה צריך להכפיל ב־6, כלומר מספר המורים כפול שש. נניח שיש חמישה מורים, ואז חמש כפול שש שווה שלושים. ה־S הזה מבטא את התלמידים ויש שלושים תלמידים.

ברור שאמיר משוכנע שהמשוואה שלו מדויקת; ההדגמה המספרית נותנת לו את הביטחון הזה. אפשר לראות בבירור את נקודות החוזק של שיטה זאת כשמשווים את הביטחון של אמיר בביצועיו הנוכחיים עם חוסר יכולתו לפתור בהצלחה מבחן אחר. מבחן זה התבסס על ספארד (1987), וכלל ארבע מטלות תרגום - שתיים עם תשובות מבניות ושתיים עם תשובות תהליכיות. ספארד (1987) מדווחת ששיעור ההצלחה של השאלות התהליכיות היה גבוה במובהק לעומת השאלות המבניות. בטבלה 4 להלן מוצג השאלון שהוצג לתלמידים.

טבלה 4
הקף במעגל את התשובה הנכונה לכל אחת מהבעיות שלהלן

הבעיה	**תשובות**
1) מספר הבנות בכיתה גדול ב־3 ממספר הבנים.	a = מספר הבנות b = מספר הבנים (1) $a+3 = b$ (2) $a = b+3$ (3) $a > b+3$
2) המספר y קטן ב־5 מהמספר x.	(1) $5+y = x$ (2) $y = x+5$ (3) $y < x+5$
3) מספר הבנים בכיתה גדול פי 4 ממספר הבנות.	כדי למצוא את מספר הבנות, צריך (1) להכפיל את מספר הבנים ב־4 (2) לחלק את מספר הבנים ב־4 (3) אי־אפשר לחשב את זה.
4) המספר g קטן פי 4.5 מהמספר f.	כדי למצוא את g צריך: (1) לחלק את f ב־4.5 (2) להכפיל את f ב־4.5 (3) אי־אפשר לחשב את זה

התשובות לשאלות 1 ו־2 הן בצורה מבנית; לשאלות 3 ו־4 - בצורה תהליכית.

לתלמידים נאמר שאחת משלוש האפשרויות נכונה, והיה עליהם להחליט איזו מן התשובות היא המתאימה ביותר לבעיה. מאחר שהשאלון היה מסוג בחירה מרובה, שום תלמיד לא השתמש בהתחלה בשיטת מילוי טבלה, וכולם בחרו בתשובות שנראו להם נכונות. שני התלמידים הטובים מאוד ואחד התלמידים הטובים בחרו בתשובות הנכונות לכל השאלות. לאחר שאמיר, התלמיד הטוב השני, בחר בתשובות, רובן לא נכונות, ביקשה ממנו המורה להשיב מחדש, והפעם במספרים, כדי שיהיה משוכנע אילו מן התשובות נכונות. להלן קטעים מן השיחות שהתקיימו במהלך הניסיון הראשון והשני להשיב על השאלון. הניסיון הראשון כונה ניסוי I, והשני - ניסוי II.

ניסוי I - שאלה 1:
אמיר (לאחר שקרא את השאלה): מכיוון שיש שתיים (אפשרויות), גם b+3 שווה למספר הבנות. לא זה צריך להיות (1) (ומקיף את (1)). כאן (מצביע על (3)) זה צריך להיות שווה (לא >). אם זה יהיה שווה זה יהיה נכון?
מורה: אני לא יודעת. אתה צריך להחליט.
אמיר אינו משנה את בחירתו (1) - ועובר לשאלה הבאה.
ניסוי II (אחרי שהמורה הציעה לו להשתמש בשיטת מילוי טבלה) - שאלה 1:
אמיר: כן, יש עשר בנות ושלושה־עשר בנים, לא, זה בעצם ההפך, שלוש־עשרה ועשרה. (קורא את תשובתו לניסוי I): a ועוד 3 שווה ל־b. (קורא את אפשרות (2)): b ועוד 3 שווה ל־a. מה עשיתי?! התבלבלתי בין שניהם.
והוא מקיף את (2) - התשובה הנכונה. אמיר השיב תשובה נכונה לשאלה 2 בניסוי I ואימת אותה מבחינת המספרים בניסוי II.

ניסוי I - שאלה 3
אמיר (לאחר שקרא לעצמו את השאלה ואת כל התשובות האפש־ריות): יכולים לחשב את זה אבל לא לפי זה. יש משהו אחר (תשובה אחרת)?
מורה: נתונות השלוש (האפשרויות) האלה, ונראה שאחת מהן נכונה. אם לא, אתה יכול לכתוב: "אף תשובה לא נכונה".

אמיר (לאחר שקרא את השאלה פעם נוספת בקול): אבל מספר הבנים לא כתוב ומספר הבנות לא כתוב, (בהחלטיות) אי־אפשר לחשב את זה.
מקיף את (3).

ניסוי II - שאלה 3
אמיר: יש עשרה בנים, ולא אומרים כמה בנות יש.
מורה (קוראת את השאלה): מספר הבנים גדול פי ארבעה ממספר הבנות.
אמיר: אם יש ארבעים בנים, אז יש עשר בנות, לכן צריך לחלק את מספר הבנים בארבע. מספר (2).
והוא מקיף את התשובה הנכונה.
אמיר גם לא הצליח להגיע לתשובה הנכונה לשאלה 4, ולאחר שחכך בדעתו אם התשובה יכולה להיות (2) או (3) - שתי האפשרויות לא נכונות - בחר ב-(2).
בניסוי II שאלה 4, אף שעבד באופן תהליכי בשאלות (1), (2) ו-(3), הוא התחיל לחשוב בצורה מבנית:
אמיר: כן, אבדוק את זה, g קטן פי ארבע וחצי... (קורא את תשובתו לשאלה 4). בסדר, זה בסדר.
מורה: איך בדקת את זה?
אמיר: כי קטן פי זה חילוק, לכן זאת הפעולה ההפוכה, כפל. וכאן (מצביע על שאלה 2) אנחנו עושים את הפעולה הפוכה, כלומר זה חיסור, זה פלוס (מצביע על התשובה שבחר), וכאן חילקנו, זאת (מכפיל) הפעולה ההפוכה.
מורה: בסדר.
אמיר: זה טוב?
מורה: בדקת את זה? איך? בעזרת פעולות הפוכות, נכון?
אמיר: כן.
מורה: בסדר. אתה יודע מה, אני אבקש ממך לבדוק.
אמיר: המספר הזה, נניח g קטן פי ארבעה (קורא לעצמו), כמה הוא שווה? אני יכול להשתמש בזה (במחשבון)?
מורה: כמובן.
אמיר: ארבע כפול ארבע וחצי זה שמונה־עשרה. זה ארבע (כותב "4" מעל ל-g) וזה שמונה־עשרה (כותב "18" מעל ל-f; קורא את תשובתו הראשונה) מכפילים את f (הפסקה).

זה (מצביע על f) צריך להיות גדול מזה (מצביע על g), זה ברור, זה שמונה־עשרה וזה ארבע. (קורא שוב את תשובתו) מכפילים את f בארבע וחצי, לא נכון!

מורה: אז מה התשובה הנכונה?

אמיר: מחלקים את f בארבע וחצי.

מורה: אתה בטוח? כל הזמן אתה שואל אותי, עכשיו אני שואלת אותך. אתה בטוח?

אמיר: מחלקים את f, זה שמונה־עשרה בארבע וחצי, שמונה־עשרה לחלק לארבע וחצי זה ארבע, בסדר, כן.

מורה: בסדר?

אמיר: הפעם זה בטוח.

ובאשר לשני התלמידים הממוצעים. בנסיונות הראשונים היו כל תשובותיהם שגויות. בניסיון השני, באמצעות מילוי טבלה, הצליחו להגיע לשלוש תשובות נכונות; שני התלמידים מצאו הדגמות מספריות נכונות לשאלה 4, אבל בחרו בתשובה לא נכונה לשאלה זאת בשאלון.

דיון

המקרה האחרון מתאר שוב את כוחן של הדגמות מספריות בתרגום, בשלב שבו דרכים מבניות מופשטות של הנמקה הגיונית עלולות להכשיל את המתרגם חסר הניסיון. ניסיון להגיע ישירות לנוסחה כללית עלול להביא לתרגום שגוי, בעוד השימוש השיטתי בשיטה התהליכית יכול להבטיח תרגום נכון. בניסוי I שאלה 1 מודגמת הטעות שרבים דיווחו עליה, הנובעת (בעברית) מהתאמת סדר המילים מימין לשמאל המבוצעת בעת התרגום, שגיאה הבאה מיד על תיקונה כאשר התלמיד משתמש בשיטת מילוי הטבלה. מספר ההדגמות הדרושות לכל תלמיד היה שונה מתלמיד לתלמיד, בהתאם למורכבות הבעיה וליכולתו המתמטית. התלמידים הטובים ויתרו על השימוש בשיטת מילוי הטבלה זמן קצר לאחר שלמדו אותה, ועברו אוטומטית לשיטת התרגום המבנית המסורתית יותר, למרות שאיש לא הציע להם לעשות כן. ואולם כשהוצגה להם בעיה קשה, או כאשר שגו, הם חזרו לשימוש בהדגמות המספריות ותיקנו את עצמם.

המחקר מציג שיטת הוראה חלופית לתלמידים לא בשלים מבחינה קוגניטיבית המתחילים לתרגם, ומספק להם כלים לבדיקת התוצאות המתקבלות. המחקר הראה שהשימוש בשיטה התהליכית שלנו שיפר

במידה ניכרת את יכולות התרגום לעומת היכולות שהושגו בשיטות תרגום מסורתיות, בייחוד לגבי תלמידים ממוצעים. יש צורך בהמשך המחקר כדי לבחון באיזו מידה שיטה זאת ישימה לגבי בעיות תרגום מורכבות יותר.

ביבליוגרפיה

Chaiklin, S. (1989). "Cognitive studies of algebra solving and Learning", In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 93-114), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Clement, J., Lochhead, J., & Monk, G. (1981). "Translation difficulties in learning mathematics", *American Mathematical Monthly,* 88, pp. 286-290.

Crowley, L., Thomas, M. & Tall, D. (1994). "Algebra, Symbols and Translation of Meaning", In J.P. da Ponte and J.F. Matosh (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference of Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, pp. 240-247, Lisbon, Portugal.

Kieran, C. (1992). "The learning and teaching of school algebra", In D.A. Grouws (ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning,* pp. 390-419, New York: Macmillan.

Lochhead J. & Mestre J.P. (1988). "From Words to Algebra: Mending Misconceptions", In A.E. Coxford & A.P. Shulte (eds.) *The Ideas of Algebra,* K-12. (pp. 127-135), Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mestre, J.P. & Gerach, W.J. (1986). "The Interpaly of Linguistic Factors in Mathematical Translation Tasks", *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 8, pp. 59-72.

Reed, S.K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). "Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems", *Journal of Experimental Pyschology: Learning, Memory and Congition,* 11, pp. 106-125.

Robinson, N., Even, R. & Tirosh, D. (1994). "How teachers deal with their students' conception of algebraic expressions as incomplete", In J.P. da Ponte and J.F. Matosh (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference oj Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4, pp. 129-136.

Sfard, A. (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections of processes and objects as different sides of the same coin", *Educational Studies in Mathematics,* 22, pp. 1-36.

Sfard, A. (1987). "Two conceptions of mathematical notions: operational and structural", In J.C. Bergeron, N. Hershcovics, and C. Kieran (Eds.), *Proceedings of Eleventh International Conference of PME* (Vol. III, 162-9), Montreal, Canada: Universite de Montreal.

"Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). "The gains and pitfalls of reification - the case of algebra", *Educational Studies in Mathematics,* 26, pp. 191-228.