הגר גל*

ישרים מאונכים - מה הבעיה?
על חוסר הידע של פרחי הוראה להתמודד עם קשיי תלמידים[1]

מודעות המורים לתהליכי החשיבה של תלמידיהם יכולה להיחשב לכלי הוראה ותו לא. ואולם היא יכולה גם להיחשב לפילוסופיה חינוכית במובן של סובלנות וניסיון לרדת לדעתו של האחר. מודעות כזו תמקד את מאמציו של המורה במציאת דרך לסייע לתלמיד, וייתכן שתאפשר מציאת פתרונות דידקטיים טובים יותר. קורס ברוח זו מתקיים במכללה לחינוך ע״ש דוד ילין ובאוניברסיטה העברית בירושלים. הקורס הוא פרי מחקר שבמהלכו ניסינו לאתר קשיים בהוראת הגיאומטריה אצל תלמידים ומוריהם, להציע הסבר תיאורטי לקשיים, ובהמשך להדריך את המורים על ידי מתן רקע תיאורטי רלוונטי ועל ידי הכשרתם להיות מודעים לתהליכי החשיבה של תלמידיהם, מתוך כוונה שהדבר יביא לשיפור תהליך קבלת ההחלטות במהלך ההוראה.

המאמר שלפנינו מדגים את השלב הראשון בתהליך: איתור מצבי הוראה בעייתיים[2] וניתוחם. נציג קשיים המתעוררים אצל תלמידים ואצל מוריהם בהבנת המושג ״ישרים מאונכים״ (כפי שהדברים עולים מתוך ניתוח שני אירועים), ונצביע על מסגרת תיאורטית לניתוח הקשיים.

רקע

רומברג וקרפנטר (Romberg & Carpenter, 1986) הצביעו על שתי דיסציפלינות נפרדות של מחקר מדעי: מחקר על חשיבתם של ילדים מחד,

---

* הגב׳ הגר גל היא מרצה ומדריכה דידקטית למתימטיקה במכללה לחינוך ע״ש דוד ילין.

1 המאמר מבוסס על: Gal, H. & Vinner, S., 1997 (ראה רשימה ביבליוגרפית).

2 מצבי הוראה בעייתיים (Problematic Learning Situations) - מצבים שבהם המורים מתקשים לעזור לתלמידיהם הנתקלים בקושי במהלך ההוראה (ראה Gal & Linchevski, 2000).

ומחקר על הוראה מאידך. קרפנטר ופטרסון (Carpenter & Peterson, 1988) קוראים לדיפוזיה בין שתי הדיסציפלינות. קרפנטר ופנמה (Carpenter & Fennema 1988, 1992) דנים במודל לאינטגרציה בין מדעי הקוגניציה לבין ההוראה, מתוך מטרה לתכנן הוראה אפקטיבית יותר במתמטיקה. הם מציעים תכנית עזרה למורים בתחום הבנת חשיבתם של התלמידים, ושימוש בידע לשם קבלת החלטות במהלך ההוראה. נסיונם מעיד על השפעה עמוקה על ההוראה והלמידה ועל הבדל משמעותי בין הישגי התלמידים בכתות ה- C.G.I. (Cognitively Guided Instruction) לבין הלומדים בכיתות הביקורת.

בעקבות דרך זו, ומתוך שאנו ערים למחקרים המצביעים על נושאים ונקודות קושי שונות בהוראת הגיאומטריה (למשל, Close, 1982; Stavy et al. 1997; Wallrabenstein, 1973; הרשקוביץ 1989) אנו מנסים לאתר מצבי הוראה בעייתיים בהוראת הגיאומטריה – הן מצד קשיי התלמיד והן מצד קשיי המורה לטפל בהם, לנתחם ולתת להם הסבר המביא בחשבון בין היתר ידע קוגניטיבי על תפיסה, המשָׂגה, ותיאוריות התפתחותיות (Gal, 1998, Gal & Linchevski, 2000 ; גל, 1998). ידע זה מובא לידיעת המורים (במקרה זה - פרחי הוראה) לצורך שיפור תהליך קבלת ההחלטות במהלך ההוראה ותכנונה.

במאמר מוצגת דוגמה לשלב איתור הקשיים וניתוחם. במקרה זה בחרנו להדגים קשיים הכרוכים במושג "ישרים מאונכים". השלב הבא של המחקר (אשר תיאורו חורג מהיקפו של מאמר זה) מבקש לבדוק אם מתן מידע למורים בדבר תהליכי התפיסה והחשיבה של תלמידים, והפיכתו למידע "אקטיבי", משפר את תהליכי קבלת ההחלטות של המורה במהלך ההוראה.

במהלך לימודי הגיאומטריה נפגש הלומד במושג "ישרים מאונכים" לאחר שכבר פגש במושגים הבאים: זווית, זווית ישרה, מעלות, זווית בת 90^0.

הערות:

(1) אין מדובר ברשימה מלאה של מושגים אלא באותם מושגים הקשורים לענייננו, בסדר הכרונולוגי של הצגתם לתלמיד (הדס ואחרים, 1991; וכן קרמר ואחרים, 1994).

(2) לעתים מופיע המושג "זווית ישרה" לאחר שהוצגה זווית בת 90^0.

(3) נבחין (באורח דידקטי) בין המושג "אנך" -- מפגש של קרן וישר בזווית ישרה, כלומר כאשר נוצרות רק שתי זוויות ישרות (⊥), לעומת "אנכים" -- חיתוך של שני ישרים בזווית ישרה, כלומר כאשר נוצרות ארבע זוויות ישרות (+). פעמים רבות מוגדר המושג "אנכים" אך הטיפול והתרגול עוסקים במושג "אנך" (⊥).

בדרך כלל, המושגים הראשונים ברשימה מוצגים כבר בבית הספר היסודי, ופעם נוספת בראשית לימודי הגיאומטריה בחטיבת הביניים, בדרך כלל בכיתה ח'. העיסוק העיקרי בישרים מאונכים נערך בדיון על תכונות אלכסוני מרובעים שונים (על פי רוב בכיתה ט').

מתודולוגיה

קשיים של תלמידים ומוריהם אותרו וזוהו באמצעות ליווי עבודתם של פרחי הוראה בשנת לימודיהם השלישית. התהליך כלל קריאת מערכי השיעור שלהם, וכן הסרטה של שיעורי גיאומטריה בכיתות ט', שבהם לימדו (בקבוצות בינוניות ומתקשות). כמו כן, לאחר השיעור נערך ראיון עם המורה (פרח הוראה). במוקד הראיון נעשה ניסיון לבחון קשיים שעלו בשיעור ולהבינם.

בשלב הבא נעשה ניסיון להבין את מקור הקשיים, תוך ניתוחם על סמך תיאוריות ומחקרים קוגניטיביים. לאור הניתוח נבחנה תגובת המורה לקשיים ונבדקה האפקטיביות שלה.

כאמור, במאמר זה יוצג הנושא הספציפי של מאונכות ישרים, יודגמו הקשיים שנצפו במהלך הוראתו וייעשה ניסיון לנתחם.

אנליזה ודיון

נתרשם תחילה מהשיח הבא, שהתקיים לאחר שיעור בנושא המעוין בכיתה ט', עם שתי מורות המלמדות קבוצות מקבילות:

אורה: אני עבדתי רוב הזמן עם החלשים. קודם כל דיברתי אתם על מושגים. בהתחלה שאלתי אותם על התכונות: מה זאת אומרת אלכסונים שווים? מי הם האלכסונים? קודם לכן עבדתי אתם על מושגים כמו זוויות, צלעות, רק כדי שיבינו קודם מה זה אומר. אם האלכסונים שווים - מי צריך להיות שווה למי? את מי בכלל צריך לבדוק? חלק הבינו, אך לא כולם. אני יודעת שעדיין לא הגעתי לכולם. בקשר למאונכים, כשאני שואלת אותם שאלה כמו איזו זווית צריכה להיווצר בין שני ישרים המאונכים זה לזה, אינני יודעת אם הם באמת יודעים את זה, אבל הם מיד אומרים 90 מעלות.

חוקרת: אז מה זה אומר? שהם כן יודעים או שלא?

אורה: כשאני שואלת אותם מה זה האלכסונים שמאונכים זה לזה, אם אני שואלת אותם איזו זווית נוצרת בין שני ישרים שמאונכים זה לזה, אז הם אומרים לי: אהה 90 מעלות, אבל הם לא יודעים מה הם צריכים לבדוק, זאת אומרת הם לא יודעים איפה הם צריכים לבדוק את הזווית הזאת כדי לדעת שהיא באמת 90 מעלות.

חוקרת: מה זאת אומרת הם לא יודעים איפה? הם לא יודעים איפה זה ה-90 מעלות?

אורה: הם לא מבינים איפה מצוירת הזווית; כן, הם לא מבינים איפה זה.

קרן: הם יודעים שמאונכים פירושו 90 מעלות, אבל הם לא מבינים מה זה.

אורה: הם לא מבינים איפה זה.

חוקרת: אוקיי, אז מה עושים כדי שהם כן יבינו?

קרן: אני לא יודעת, אני ממש לא יודעת.

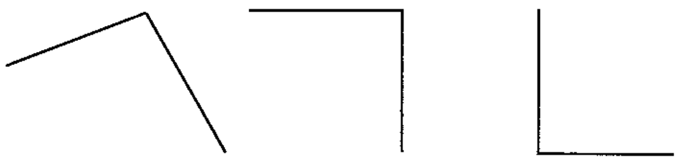
השיחה רומזת לשני קשיים. האחד: אין קישור בין המושגים זווית ישרה לבין 90^0; השני: תלמידים מתקשים לזהות היכן צריכה להיות זווית ישרה (90^0) בין שני ישרים מאונכים.

כדי לנתח את הקשיים, נבחן ראשית את מושג המאונכות והאלמנטים השונים המופיעים בו.

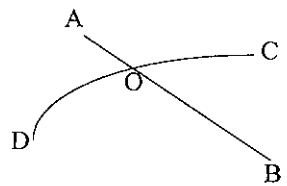
ההגדרה המופיעה בספרי הלימוד או זו הניתנת בשיעור היא פחות או יותר ההגדרה הבאה: "ישרים מאונכים" הם שני ישרים הנחתכים בזווית ישרה.

המושג מכיל כמה אלמנטים, חלקם גלויים והאחרים סמויים:
(1) שני ישרים (לעתים שני קטעים או ישר וקטע).
(2) הישרים נחתכים.
(3) בנקודת החיתוך נוצרת זווית ישרה.
(4) ישנן עוד שלוש זוויות בנקודת החיתוך.
(5) גם שלוש הזוויות האחרות הן ישרות.
(6) זווית ישרה היא זווית בת 90^0.

תלמיד הנפגש עם מושג זה כבר מבין (כך לפחות נניח) מהם ישרים ומהם ישרים נחתכים (אלמנטים 1 ו-2). כמו כן, ניתן להניח כי התלמיד יודע לזהות זווית ישרה כאשר היא מוצגת בצורתה היסודית (קרי: שתי קרניים היוצאות מנקודה משותפת). קושי הצפוי בשלב זה הוא אבטיפוס מוגבל של זווית ישרה, כלומר התלמיד מזהה זווית ישרה רק אם אחת מקרניה אופקית.

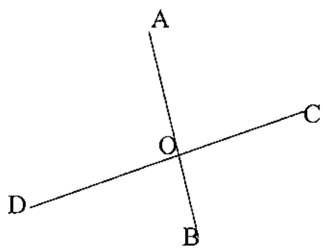

זווית ישרה   זוית ישרה (?)   "לא זווית ישרה"

קושי ממין זה דורש מוכנות בנושא זווית ישרה. נניח אם כן כי התלמיד יודע לזהות זווית ישרה "יסודית" כלשהי (אלמנט 3). בפני התלמיד עדיין ניצבים כמה קשיים:
א. בקונפיגורציה של ישרים מאונכים עליו לזהות את הצורה היסודית של זווית ישרה. במילים אחרות, התלמיד נדרש לזהות צורה פשוטה בתוך צורה מורכבת (שני ישרים נחתכים היוצרים ארבע זוויות ולא רק שתי קרניים).
קושי זה יכול להיות מוסבר בעזרת עקרונות ארגון התפיסה על פי הגשטלט (Anderson, 1995). על פי עקרון הרציפות הטובה אנו נוטים לזהות בקלות רבה יותר קווים שיש בהם יותר רציפות מאשר קווים שמופיעה בהם תפנית חדה. לדוגמה, שאל את עצמך מה אתה רואה בשרטוט הבא:



רוב האנשים יענו תשובה כגון: ישר AB וקשת CD. נדיר למצוא תשובה כמו קו AOC ועוד קו DOB. עקרון הרציפות הטובה מסביר את נטייתנו זו.

אם נסתכל בשרטוט הבא, נמצא כי אותו עיקרון מעודד את ראיית שני הקטעים AB ו-CD, ואילו ראיית הזווית הישרה מחייבת ראיית AOC למשל - קו הנוגד את עקרון הרציפות הטובה.



לפיכך, תלמיד הרואה שני ישרים נחתכים אינו נוטה לראות ביניהם זווית, וממילא אינו יודע היכן לחפש זווית ישרה. כזכור, קושי כזה עלה בשיחה.

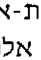
ב. בחירה - התלמיד נדרש לבחור באיזו מבין ארבע הזוויות שלפניו עליו להתמקד (אלמנט 4, 5). ההבנה שאם אחת ישרה כולן ישרות ולכן הבחירה שרירותית (גם אם במקרים רבים יש עדיפות של נוחות בבחירת אחת מהן) - איננה מובנת מאליה.

הבנה כזו יכולה להיות "הבנה חזותית" (הרמה הראשונה על פי התיאוריה של ואן הילה -- ויזואליזציה) (למשל, Hoffer, 1983) ודורשת מוכנות בדרגת

קושי גבוהה ברמה 1[4]. הבנה כזו יכולה להיות גם ברמה השנייה (על פי ואן הילה) - אנליזה[5]. האנליזה נעשית על ידי פעילות מנטלית, וכדאי להוסיף לה גם תיאור מילולי. כך גם ברמה השלישית - הפשטה (למשל על ידי הגדרת זווית ישרה כחצי מזווית שטוחה והסקת מסקנות מכך).

ניתן לשער כי ב"סקירה מהירה" של ארבע הזוויות שלפניו יבדוק התלמיד את זו "הקרובה ביותר" לתבנית המצויה בראשו כזווית ישרה (לחילופין, תהליך הבדיקה יהיה על ידי אלימינציה - "איזו זווית לא כדאי לבחור". הטענות שנטען במקרה זה תהיינה דומות, או בסדר שרירותי לחלוטין). "קרובה ביותר" - באיזה מובן? האם הקריטריון יהיה גודל הזווית? או שמא אוריינטציה במישור? עד כמה הטרנספורמציות המנטליות שלו גמישות ומאפשרות השוואה בין מצב מישורי אחד לשני?

נבחן את תהליך עיבוד המידע החזותי אצל התלמיד, לאחר שהמידע התקבל ונכנס למערכת הקוגניטיבית. לאחר קבלת המידע החזותי הוא מאורגן ביחידות, כך שכל יחידה מייצגת חלק מהמבנה השלם. צורות מורכבות נבנות מהיררכיה של יחידות (Anderson, 1995). למשל, האובייקט

יכול להתחלק לתת-אובייקטים הבאים  בשלב זה האובייקט מזוהה כמורכב מחלקים אלה. אך מה אם האובייקט הנצפה הוא: ? מהסתם יתחלק לתת-אובייקטים הבאים:  האם יצליח התלמיד למצוא זהות בין תבנית זו לבין התבנית הקודמת של ישרים נחתכים (מאונכים), השמורה בזיכרונו? גם אם התשובה חיובית, עדיין ניצב בפניו קושי נוסף: עליו לזהות תבנית של זווית בתוך התבנית המורכבת ולהשוותה לתבנית של

4 למשל על ידי הצגה של שני ישרים מאונכים כשכל אחת מארבע הזוויות הנוצרות צבועה בצבע שונה, ואולי אפילו כל אחת מהזוויות מודגשת בתורה. באופן זה מובלטים הישרים, ובנוסף מתגלות הזוויות, כל אחת בתורה. רצוי גם תהליך הפוך - קודם מודגשות הזוויות, ובשלב הבא - גם הישרים "המפרידים" ביניהן.

5 למשל על ידי פירוק והרכבה של ארבע זוויות ישרות לכדי צורה כלשהי, כשמודל הזווית "השלמה" נותר ללא שינוי והזוויות הישרות מוסרות ממנו ושבות לכסותו, או קיפולי נייר לארבעה תוך כדי פתיחת קיפולי הנייר וסגירתם.

זווית ישרה השמורה בזיכרונו (לדוגמה, ייתכן שהוא יזהה את הזווית -- , ואילו בזיכרונו שמורה התבנית). המצב נואש? לא ממש. עיסוק מרובה בהמחשות של זוויות ישרות וישרים מאונכים (תוך התנסות בזוויות לא ישרות ובישרים לא מאונכים) בעזרת גזירות נייר, פאזלים, טרנספורמציות במרחב של כל אלה - משפרים את גמישות העיסוק בתבניות כדי להפכן למוכרות יותר.

עתה, אם נשוב לבעיית "הבחירה" ולצורך לזהות זווית מסוימת כישרה, אולי ניתן לשער בזהירות כי הבחירה תיפול על הזווית הדומה ביותר ("דומה" באחד המובנים שהוזכרו) לתבנית המצויה בזיכרונו.

ג. ההסקה לגבי שלוש הזוויות האחרות אינה טריוויאלית. כאן ישנן שתי אפשרויות. האחת: התלמיד מבין שכל ארבע הזוויות שוות. אם כך, עליו לצעוד עוד צעד לוגי קטן ולהסיק שאם זווית אחת ישרה - גם האחרות ישרות. השנייה: הוא אינו יודע שכולן שוות, ובחירתו בזווית היתה מקרית; או אז אין זה ברור כלל וכלל שגם הזוויות האחרות ישרות (במקרה כזה, אם ידבר אתו המורה על זווית אחרת מזו שבחר - אל לו להתפלא אם התלמיד לא יֵדע כי מדובר בזווית ישרה).

עד כאן עסקנו בזווית הישרה ללא הגדרת המעלה. לעתים תכופות, הזווית הישרה מוגדרת לתלמידים כזווית בת 90^0 (אלמנט 6).

כל אותם קשיים שמנינו חוזרים גם במקרה זה (החלק והשלם, הבחירה, ההסקה לגבי הזוויות האחרות), אלא שהפעם נוסף עוד קושי: לא ידוע מהו האבטיפוס של התלמיד לגבי זווית ישרה, והאם הוא מ ת ל כ ד עם זווית בת 90^0. מהשיחה עולה הרושם כי התלמידים שמעו את המונחים 90^0 וזווית ישרה, והם יודעים כי הם מונחים נרדפים; ואף על פי כן אין הכרח שתהיה למונחים משמעות איזושהי, ואם אכן ישנה כזו, אין הכרח שהיא תהיה זהה לשניהם. נעשה שימוש במונח "התנהגות קונספטואלית" (שפירושו, תוצאת תהליכי חשיבה קונספטואליים, שבהם עוסקים במושגים, ביחסים שביניהם, ברעיונות שבהם המושגים קשורים, בקשרים לוגיים וכדומה) לעומת "התנהגות פסידו-קונספטואלית", היכולה להיראות כהתנהגות קונספטואלית, אלא שזו נוצרת על ידי תהליכים מנטליים שאינם מאפיינים

התנהגות קונספטואלית (Vinner, 1997). כדבריו של וינר, בתהליכים מנטליים שמובילים להתנהגות קונספטואלית מילים קשורות לרעיונות, ואילו בתהליכים מנטליים שמובילים להתנהגות פסידו-קונספטואלית מילים קשורות למילים, ואין מאחוריהן רעיונות.

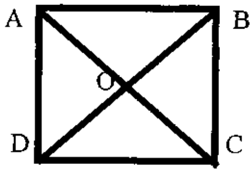
בשיחה שלפנינו ניתן לצפות בהתנהגות פסידו-קונספטואלית. אמנם התלמידים עוסקים במושגים של זווית, אנכים, 90 מעלות - אך כפי הנראה היחסים ביניהם (אם בכלל קיימים יחסים כלשהם בין המושגים) לא ברורים, ולא ידועים (לפחות למורה...) רעיונות שבהם המושגים קשורים. "90 מעלות" הן מילים הקשורות למילה "מאונכים" אך אין מאחוריהן רעיונות, ולכן התלמידים אינם יודעים היכן לחפש "90 מעלות".

מורים עוסקים פעמים רבות בטיפול "מספרי" בזווית ישרה: חישובי זוויות, בדיקת מאונכות על פי הגודל המספרי של הזווית וכדומה. גם תלמידים חלשים יכולים לפתור בהצלחה תרגילים כאלה; אך אין הדבר מעיד על הבנה של מושג המאונכות. הם נשענים על ידע באריתמטיקה ובונים את תשובתם על רמזים מילוליים או ציוריים לתרגיל הדרוש. במעבר לבעיות לא-חישוביות יתגלה המצב לאשורו.

נחזור עתה לאורה ולקרן. אורה מבחינה בכך שהתלמידים אינם "מוצאים" את הזווית (אורה: "הם לא מבינים איפה מצוירת הזווית, כן, הם לא מבינים איפה זה... הם לא יודעים איפה הם צריכים לבדוק את הזווית הזאת כדי לדעת שהיא באמת 90 מעלות."). אין שום רמז בדבריה לכך שהיא מבינה את מקור הבעיה. אין היא מתייחסת לקושי לזהות צורה פשוטה בתוך צורה מורכבת, לנטייה להסתכל על קווים המקיימים "רציפות טובה", או לתהליך עיבוד המידע החזותי, היכול גם הוא לתרום לקושי. מאידך, נראה שהיא ממקדת טוב יותר את הבעייתיות הכרוכה בשימוש במונחים 90 מעלות וזווית ישרה ("אורה: בקשר למאונכים, כשאני שואלת אותם שאלה כמו איזה זווית צריכה להיווצר בין שני ישרים המאונכים זה לזה, *אינני יודעת אם הם באמת יודעים את זה, אבל הם ישר אומרים 90 מעלות*.... אם אני שואלת אותם איזו זווית נוצרת בין שני ישרים שמאונכים זה לזה, אז הם אומרים לי *אהה 90 מעלות, אבל אז הם לא יודעים מה הם צריכים לבדוק*"). גם קרן חשה זאת (קרן: "הם יודעים

שמאונכים פירושו 90 מעלות אבל הם לא מבינים מה זה"). אך למרות זאת אין הן מזהות התנהגות פסידו-קונספטואלית ואינן מגדירות במדויק את הבעיה. ממילא אין להן כל מושג כיצד לשפר את ההבנה אצל התלמידים (קרן: "אני לא יודעת, אני ממש לא יודעת").

שיחה אחרת התקיימה בין מורה (פרח הוראה) לתלמידה במהלך שיעור גיאומטריה בכיתה ט' (קבוצה חלשה), שבה עסקו התלמידים בבדיקת תכונות הריבוע. המשימה היתה לבדוק אם אלכסוני הריבוע מאונכים זה לזה. לפני התלמידים נמצא שרטוט ריבוע עם אלכסוניו:



תלמידה: (מצביעה על AC) נכון פה זה חוצה? אז פה זה 90 (מצביעה על ABC>) ופה זה 90 (מצביעה על ADC>) (כנראה מתכוונת לכך שהאלכסון גרם לחלוקת הריבוע לשני "חלקים שווים". במשולשים שהתקבלו כתוצאה מכך בולטת הזווית הישרה של המשולש, שהיא גם זווית של הריבוע).

מורה: ברגע שמדברים על אלכסונים מאונכים... כשאלכסונים נחתכים... אני רוצה שתראי לי את האלכסונים (המורה מנסה לאתר את מקור הקושי).
תלמידה: (מצביעה על AC ו-BD).
מורה: נכון. ואיפה הם נחתכים?
תלמידה: (מצביעה על האלכסון AC ומראה שיוצר שני משולשים ABC ו-ADC) (מתכוונת כנראה לכך שהאלכסונים חותכים את הריבוע לשניים). (לאחר שהות קלה:) אה, לא, פה הם נחתכים (מצביעה על ארבעת הקדקודים). (כאן הבינה כנראה כי מדובר בנקודות החיתוך של האלכסונים עם הריבוע).
מורה: איפה נקודת המפגש של שני האלכסונים האלה?
תלמידה: פה (מצביעה על O).

מורה: יפה. עכשיו, כשאני שואלת אם הם מאונכים זה לזה, הכוונה היא: ברגע שנחתכים, האם נוצרות שם (מצביעה על O) זוויות של 90?

תלמידה: כן! (מצביעה על הזווית הישרה בכל אחד משני המשולשים ABC ו-ADC, כלומר על זוויות ABC› ו-ADC›).

לאחר רגע:

תלמידה: אה, לא, אלה (ומראה על שני המשולשים האחרים וזוויותיהם: BAD› ו- BCD›)

מורה: כשאני מדברת על אלכסונים מאונכים זה לזה, בנקודת המפגש יש 90^0. איפה נקודת המפגש?

תלמידה: (מצביעה על O).

מורה: עכשיו תגידי לי אם בין האלכסון הזה (מצביעה על AC) ובין האלכסון הזה (מצביעה על BD) נוצרות זוויות של 90^0 ?

תלמידה: (מצביעה על ABC› !)

בשיחה זו ניתן לראות כי התלמידה אינה שולטת במושג "ישרים נחתכים"; לכן היא נותנת פירושים שונים לחיתוך: האלכסון חותך את הריבוע למשולשים; האלכסונים חותכים את שפת הריבוע (בקדקודים). אך גם לאחר שהמורה מסבירה לה היכן נקודת החיתוך (נקודת המפגש) והתלמידה מזהה אותה בבירור, משהיא מתבקשת לבדוק האם הזווית הנוצרת באותו מקום היא זווית ישרה, היא פונה שוב ושוב אל זווית אחרת, זווית המשולש. הסברים מספר ייתכנו לכך:

1) הזווית הישרה שבמשולשים ABC ו-ADC היא הזווית המתאימה לתבנית השמורה בזיכרונה לזווית ישרה, ולכן בחיפוש אחר זווית ישרה היא "ננעלת" קודם כל על זוויות המתאימות לתבנית.
2) לאחר מחשבה שנייה היא מבצעת טרנספורמציה מנטלית על הזווית שבציור, ואז מצביעה על משולשים BAD ו-BCD, שבהם מזוהה טרנספורמציה של תבנית הזווית הישרה שבזיכרונה.
3) לחלופין ייתכן כי בזיכרונה כמה תבניות של זוויות ישרות, חלקן קלות יותר לשליפה (High Activation, High Strength) (Anderson, 1995), ולכן עירור הזיכרון נעשה בקלות. החלק האחר של תבניות נמצא בזיכרון ארוך הטווח (Long Term Memory), ולצורך השליפה ממנו יש צורך לעורר את המידע. במקרה זה עירור המידע נעשה באמצעות הזוויות הישרות שבמשולשים ABC ו-ADC, אשר תבניותיהן נמצאו מן הסתם

בחלק האקטיבי של הזיכרון. גם כאן נזכיר כי אימון מבנה הידע מגדיל את כוחו, ולכן אימון של זיהוי זוויות ישרות במצבים מישוריים שונים עשוי לתרום לקלות השליפה.

4) יתכן שבהתחקות אחר התהליך המחשבתי יסתבר כי בשלב עיבוד המידע החזותי היא מפרקת את האובייקט לשני תת-אובייקטים, שני משולשים המרכיבים  אותו. פירוק כזה מקשה על זיהוי הזווית הרצויה משתי סיבות: ראשית, הזווית הרצויה אינה נמצאת כלל בתת-האובייקט; שנית, זווית ישרה הנמצאת בתת-האובייקט (המשולש ישר הזווית) מספקת לה תשובה ואינה יוצרת צורך "להמשיך בחיפושים". פירוק שונה של האובייקט לתת-אובייקטים.

למשל ל-  אינו פשוט כלל ועיקר, בעיקר לאחר שפירוק מסוים כבר נעשה.

ניתן לתהות מה היתה תשובתה של התלמידה לו היה הריבוע שבציור מסובב ב-45^0. במקרה זה היו האלכסונים מקבילים לשולי הדף, והזווית הישרה היתה מופיעה בצורה פרוטוטיפית, ולכן קלה יותר לזיהוי. תוצאות מחקרה של הרשקוביץ על משולשים ישרי זווית מתאימות להשערה זו (הרשקוביץ 1989). מאידך, העיסוק בריבוע בצורת יהלום (diamond) קשה יותר לרוב התלמידים (שאינם מזהים בו ריבוע) ולכן, מן הסתם, היה "נפסל" מלכתחילה.

5) נדון בקושי מכיוון אחר. המורה עוסקת במושג "אלכסונים מאונכים", ומן הסתם אף הגדירה אותו. בכל מקרה היא חוזרת ומסבירה/מגדירה לתלמידה ("ברגע שהאלכסונים נחתכים - האם בנקודת המפגש נוצרות זוויות של 90?"). אך מהי "תמונת המושג" של התלמידה? (Vinner, 1991) מהי ההצגה החזותית שלו בעיניה? למשל, אולי בעיניה "בנקודת המפגש נוצרות זוויות של 90" פירושו: זהו "מקום/אזור היווצרותן" של זוויות כאלה, אך אין פירושו שהאלכסונים יהוו את שוקי הזווית. במקרה זה, חיפושיה של התלמידה עונים על תמונת המושג שלה!

6) לבסוף, ניתן להסביר את דברי התלמידה על ידי בחינת השפעת ההֶקשר שהתלמידה מייחסת למילים "חוצה" ו"חותך" על זיהוי התבנית. בתהליכים המאפיינים תפיסת מידע חזותי, זיהוי התבניות יכול להתרחש בתהליך מעלה-מטה (top-down processing – Anderson, 1995): בתהליך כזה הֶקשר או ידע כללי מדריכים את התפיסה

ומשמשים לזיהוי התבנית. במקרה שלפנינו, התלמידה מייחסת למילים ״חוצה״ ו״חותך״ – הֶקשר של ״ביתור״ לשני חלקים. הקשר כזה מביא לזיהוי שני המשולשים ישרי הזווית הנוצרים על ידי ״חיתוך״ הריבוע (כשם שחותכים עוגה, למשל). לעומת זאת, במילה ״מפגש״ אין עניין של חיתוך, ולכן כשהמורה מדברת על מפגש, ההקשר (של נקודת מפגש, למשל) גורם לתלמידה להתייחס לנקודת חיתוך האלכסונים – המפגש שלהם.

עתה נשוב אל המורה וננסה להצביע על ליקויים בתקשורת בינה לבין התלמידה. כשהמורה מקבלת את התשובה ״המפתיעה״ בדבר מיקום הזווית הישרה, היא בודקת אם התלמידה יודעת מהם אלכסונים. המורה חושדת כי הקושי נעוץ בזיהוי אלכסונים. מסתבר שלא. אם כך, היא עוברת לבדוק אם התלמידה מזהה את נקודת החיתוך. מאחר שאין למורה שום מושג מה גורם לתלמידה לומר את מה שהיא אומרת (תלמידה: מצביעה על האלכסון... מצביעה על ארבעת הקדקודים), היא מכוונת אותה (מורה: ״איפה נקודת המפגש של שני האלכסונים האלה?״) ומכניסה מילים לפיה (מורה: ״הכוונה היא ברגע שנחתכים... כשאני מדברת על אלכסונים מאונכים זה לזה, בנקודת המפגש יש 90״). אין למורה כל מושג לגבי אפשרות של תבניות השמורות בזיכרון התלמידה כזוויות ישרות, תהליכי שליפה מן הזיכרון (קלים יותר או קשים יותר), אפשרויות פירוק הצורה הנתונה לתת-אובייקטים ״מפריעים״, או תמונת מושג אפשרית לגבי מקום יצירת 90 מעלות.

עד כאן ניתחנו וחיטטנו בראשם של התלמידים, חיטוט מעייף משהו. אך הבנת המורה את התהליכים המחשבתיים תשנה, מן הסתם, את מהלך ההוראה שלו ובעיקר את תגובותיו במצבים של אי-הבנה אצל התלמיד. למשל, נושא זה של מאונכות בין ישרים יזמן עיסוק רב בכל הקשרים החזותיים בין זוויות ישרות, ישרים מאונכים, וצורות מורכבות שבהן הם מופיעים. בכך נכללות משימות של בניית כל אחד מהשלושה (זוויות ישרות, ישרים מאונכים וצורות מורכבות) באמצעות רכיביהם הבסיסיים; ולהפך, פירוקן של הצורות ״הסופיות״ למרכיבים שונים באופנים שונים. למשל פירוק  ל-  וכן פירוקו ל- . האימון יעשה על ידי דגמים מוחשיים, על ידי שרטוטים ועל ידי בדיקות מנטליות.

סיכום

במאמר הצגנו קשיים שנצפו אצל תלמידים בהבנת המושג "ישרים מאונכים". ראינו שיש קושי להבין את צירוף המרכיבים השונים הבונים את המושג (ישרים שהם גם שוקי הזווית; לא זווית אחת בלבד אלא ארבע כאלה; זווית מיוחדת: זווית ישרה, שיש לה "שם נוסף": זווית בת 90°, ולא ברור מה פירושו של שם זה, מה הקשר בין זוויות ישרות אחרות הנמצאות "בקרבת מקום" לבין הזווית הישרה המופיעה בהגדרה?).
ניסינו לתת הסברים שונים למקורן של ההבנות השגויות: השערות לגבי תהליכי עיבוד המידע החזותי, לגבי תהליכי החשיבה (פסידו-קונספטואליים?), לגבי תמונת המושג אצל התלמיד ותהליכי שליפת מידע רלוונטי מן הזיכרון.

לבסוף, בדקנו את תגובות המורים לקשיים שעלו ומצאנו מורים אובדי עצות מחד ו"פותרי בעיות בכל מחיר" מאידך. מסקנתנו הברורה היא, כי חוסר הידע של המורה להבין את קשיי התלמיד מונע ממנו התמודדות יעילה והוראה אפקטיבית.

ניתן להניח כי הדרכת המורים בידע קוגניטיבי רלוונטי והתנסות בניתוח מצבים כגון אלה שהובאו במאמר - עשויים לתרום תרומה ניכרת לשיפור ההוראה והלמידה. ניסיונות ראשונים מסוג זה נעשו במסגרת קורס מיוחד לסטודנטים להוראה, המתקיים במכללת דוד ילין ובאוניברסיטה העברית. תוצאות ראשונות הצביעו על שינויים מעודדים בתפיסת המורים את תהליך ההוראה.

ועוד כדאי להדגיש כי בעיני הכותבת החשוב מכל אינו מה ההסבר המתאים מכולם, אלא התהליך שאמור המורה לעבור בניסיון להבין את תשובותיו של התלמיד. ההנחה היא כי תהליך כזה יאפשר למורה להציע לתלמיד פתרונות הולמים. לא עוד העברת ידע אלא בניית הידע של התלמיד, ברוח הקונסטרוקטיביזם.

ביבליוגרפיה

גל, ה׳ (1998), *איתור וזיהוי קשיים אצל סטודנטים להוראה. המקרה של הזווית, דו״ח מחקר*, מכון מופ״ת.

הדס, נ׳ פרידלנדר, א׳ רדאי, א׳ (1991), *פרקים בהנדסת המישור, חלק א׳.* המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, המרכז הישראלי להוראת המדעים.

הרשקוביץ, ר׳ (1989), *דימויי מושגים הנדסיים בסיסיים אצל תלמידים ומורים*, חיבור לשם קבלת תואר דוקטור לפילוסופיה, האוניברסיטה העברית, ירושלים.

קרמר, ע׳ הדס, נ׳ קורן, מ׳ סירי, א׳ (1994). *פרקי מתימטיקה, גיאומטריה,* המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, המרכז הישראלי להוראת המדעים.

Anderson, J.R. (1995), *Cognitive Psychology and Its Implications,* 4th ed, W.H. Freeman and Comany, New York.

Carpenter, T.P.d. Fennema, E. (1988), Research and Cognitively Guided Instruction. In: Fennema, E., Carpenter, T.P. Lamon, S.J. (Ed.), *Integrating Research on Teaching and Learning Mathematics,* Wisconsin Center for Education Research, University of Wisconsin.

Carpenter, T.P.d. Fennema, E. (1992), Cognitively Guided Instruction: Building on the Knowledge of Students and Teachers, In: *International Journal of Educational Research,* Vol. 17, P. 457-470.

Carpenter, T.P.d. Peterson, P.L. (1988), Learning Through Instruction: The Study of Students Thinking During Instruction in Mathematics, In: *Educational Psychologist,* 23(2), pp. 79-85, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Close, G.S. (1982), *Children's Understanding of Angle at Primary / Secondary Transfer Stage.* Polytechnic of the Southbank. London.

Gal, H. & Vinner, S. (1997), Perpendicular Lines - What Is the Problem? Pre-Service Teachers' Lack of Knowledge on How to Cope with Students' Difficulties. *Proceedings of 21st PME,* Lahti, Finland. 2, 281-288.

Gal, H. (1998). What Do They Really Think? What Students Think About the Median and Bisector of an Angle in the Triangle, What the Say and What Their Teachers Know About it. *Proceedings of the PME22,* Stellenbosch, South Africa. 2, 321-328.

Gal, H. & Linchevski, L. (2000), When A Learning Situation Becomes A Problematic Learning Situation: The Case of Diagonals in the Quadrangle, *Proceedings of the 24th PME,* Japan. 2, pp. 297-304.

Hoffer, A. (1983) .Van Hiele - Based Research In: Lesh, R. & Landau, M. (Ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Chap.7. N.Y. Academic Press.

Romberg, T. A. & Carpenter, T. P. (1986), Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines on Scientific Inquiry. In: W. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3rd ed., pp. 850-873), New York: Macmillan.

Stavy, R. Tirosh, D. & Tsamir, P. (1997), Intuitive Rules and Comparison Tasks: The Grasp of Vertical Angles. *Proceedings of the 1st Mediterranean Conference: Mathematics, Education and Applications.* Nicossia, Cyprus, 269-276.

Vinner, S. (1991), The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall, D. (1991), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1997), The Pseudo-Conceptual and Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*. 34, 97-129.

Wallrabenstein, H. (1973), Development and signification of Geometry Test. *Educational Studies in Mathematics*. 5, 81-89.